Problemes de repartiment just i un joc de taula

Natàlia Castellana
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
natalia@mat.uab.cat

Resum

En ciències socials i polítiques apareixen problemes de repartiment. Donats uns béns (divisibles o no), un es pregunta si existeix un repartiment just d'aquests entre uns participants. No busquem repartiments proporcionals, sinó que tothom estigui content amb el que té. Un concepte clau és el de repartiment sense enveja sota certes hipòtesis. Els problemes clàssics d'aquesta mena són els de repartir un pastís, però n'hi ha d'altres com el de repartir equips, habitacions, tasques... Donarem un parell d'exemples d'aquest tipus de problemes i com un lema aparentment innocent és la clau per provar l'existència de solucions: és el lema de Sperner. Aquest lema és molt rellevant per donar una demostració constructiva del conegut teorema del punt fix de Brouwer. I acabem amb una part lúdica: el joc del HEX.

Abstract

In political and social sciences, a fair division problem is a problem of dividing a set of goods or resources between several people, such that each person receives his/her due share. We are not interested in proportional division but in envy-free division, in which every partner is satisfied with his share and feels that his allocated share is at least as good as any other. Classical problems of this type are cutting cake and rental divisions. We present a couple of examples whose solution is based on a combinatorial lemma: Sperner's lemma. The results also provide constructive proof of Brouwer's Fixed Point Theorem. We conclude with an application to a table game: HEX.

1. Introducció

Quantes vegades ens hem trobat en la situació d'haver de repartir un pastís entre els assistents a una festa. El que acaba passant en general és que, o bé s'intenta fer talls de la mateixa mida per a tots aquells que en volen menjar, o bé es van fent talls demanant per torns a qui li toqui que decideixi com el vol. El primer mètode és un mètode de repartiment proporcional en què s'intenta que tothom tingui un tall de la mateixa mida, però sempre hi ha qui no se l'acaba i qui en menjaria més. El segon mètode intenta corregir això ajustant-se a preferències individuals, però es fa de manera improvisada i s'acaba tendint al final a fer talls proporcionals perquè tohom en tingui; a més, depèn de l'ordre en què es reparteix entre els convidats.

Dels problemes de repartiment d'aquesta mena en diuen «problemes del pastís», però n'hi ha d'altres, com per exemple el del lloguer d'un pis compartit. Si les habitacions del pis no són totes iguals (amb finestra o no, diferents mides...), potser no tots els llogaters han de contribuir en la mateixa mesura al lloguer. Potser algú prefereix pagar més a canvi de disposar de finestra o algú altre s'estima més estalviar en el lloguer i no li importa tenir una habitació més petita. Hi ha alguna manera de repartir el lloguer i les habitacions entre els llogaters i que tothom quedi content amb l'habitació assignada i la part del lloguer que li toca? Fins i tot hi ha problemes d'assignació de tasques entre treballadors que poden rebre un sou diferent segons la feina assignada. Evidentment caldrà primer decidir què volem dir amb «que tothom quedi content».

Per tant, en lloc de tendir a repartiments proporcionals, podem buscar repartiments justos en un altre sentit: tots els participants estan satisfets amb el que els ha tocat al final (i el preu que en paguen si és el cas) i no envegen el que han obtingut els altres participants en el repartiment. En la branca de l'economia que estudia aquests tipus de situacions, aquests repartiments es diuen divisions sense enveja (*envy-free* en anglès). La primera pregunta que ens fem és si hi ha sempre una solució del problema de divisió sense enveja? Veurem com uns resultats clàssics de combinatòria de triangulacions permeten donar resposta a la pregunta.

2. El lema de Sperner i els problemes de divisió justa

Per poder formalitzar el problema, el primer que hem de pensar és quin és l'espai on es troben totes les possibles particions de l'objecte a repartir. En el cas del pastís, per exemple, podem suposar que és rectangular de longitud 1 i que els talls són perpendiculars al costat de longitud 1. En aquest cas, per presentar un repartiment en n talls ens cal donar les n longituds dels talls successius que denotarem per $l_i \in [0,1]$ i que compleixen $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$. Cal determinar doncs $n-1$ valors $l_1, \ldots, l_{n-1}$ amb suma menor o igual a 1. En el cas d'haver-hi dos convidats estem parlant simplement de fixar un número entre 0 i 1, per tant, de l'interval $[0,1]$. En el cas més general estarem parlant d'escollir un punt (en coordenades baricèntriques com veurem) en un objecte geomètric: l'n-símplex. Primer veurem quin és el resultat teòric clau en l'algorisme per trobar particions justes sense enveja i després farem un parell d'aplicacions amb caraterístiques diferents: el problema del pastís i el del lloguer. Aquestes i altres situacions estan descrites a l'article [6].

2.1. El lema de Sperner

El lema de Sperner és una lema de combinatòria topològica sobre divisions de símplexs. Anirem pas a pas per explicar què ens diu aquest resultat.

Comencem per l'interval $I = [0,1]$. El partim en n subintervals en els punts $0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq 1 = x_n$. Els valors x_i ara denotem elsAlspunts de tall i no les longituds dels corresponents talls. Als vèrtexs obtinguts els posem una etiqueta + o $-$ amb l'única condició que els extrems $x_0 = 0$ i el $x_n = 1$ tinguin etiquetes diferents (figura 1). Un subinterval direm que és positiu si els seus extrems tenen etiquetes del mateix signe i negatiu si tenen signes diferents. Aleshores podem afirmar que hi ha un nombre senar de subintervals negatius. Per què? Ja veiem que a la força hi ha d'haver un nombre senar de subintervals negatius (canvis de signe) si els extrems tenen signe diferent, però formalitzem ho amb un argument de comptar que ens servirà més endavant.

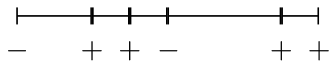

Figura 1. El lema de Sperner per l'interval.

És una estratègia clàssica de comptar la mateixa quantitat de dues maneres diferents. Per a cada subinterval comptem quants + té en els seus extrems i ara fem la suma total mirant tots els intervals. Els subintervals de tipus negatiu contribueixen a la suma amb 1 i els de tipus positiu amb 0 o 2. Així, si veiem que la suma és senar ja tindrem que el número de subintervals de tipus negatiu també ho és.

Ara fem el mateix compte des del punt de vista dels vèrtexs i no dels intervals. Aquest número és també igual al doble de vèrtexs interiors amb etiqueta + (ja que pertanyen exactament a dos subintervals) més 1 (el que correspon a l'extrem +). I per tant, aquest número és senar. Ja ho tenim.

El que acabem de fer és el cas de dimensió 1 del lema de Sperner. Anem a veure com s'enunciaria una situació similar en dimensió 2. Sigui *T* un triangle amb una subdivisió del seu interior donada en regions també triangulars de manera que dues regions tenen intersecció o bé buida, o bé en una aresta sencera o bé en un vèrtex.

Ara els vèrtexs d'aquesta subdivisió estaran etiquetats amb elements del conjunt $\{0,1,2\}$, però de manera que se satisfan les dues condicions següents (vegeu la figura 2):

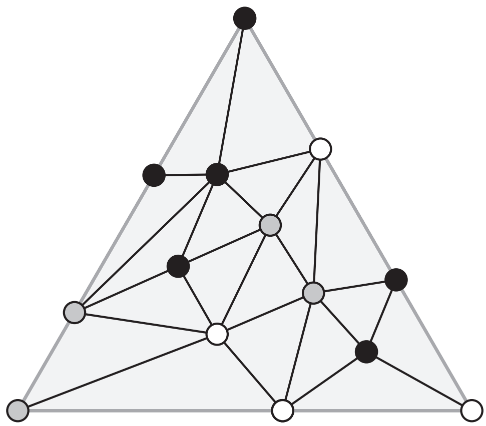

Figura 2. Etiquetatge d'una triangulació.

1. Els vèrtexs principals del triangle T tenen etiquetes diferents $\{0,1,2\}$.
2. L'etiqueta corresponent a un vèrtex situat en una de les arestes exteriors de T només pot tenir una de les dues etiquetes que apareixen en els vèrtexs principals situats a l'aresta que determimen.

Aleshores, la versió en dimensió 2 del lema de Sperner ens dirà que hi ha un nombre senar de triangles de la subdivisió que tenen els vèrtexs etiquetats usant tots tres elements del conjunt $\{0,1,2\}$ (figura 3). Per tant, en particular sempre n'hi haurà algun.

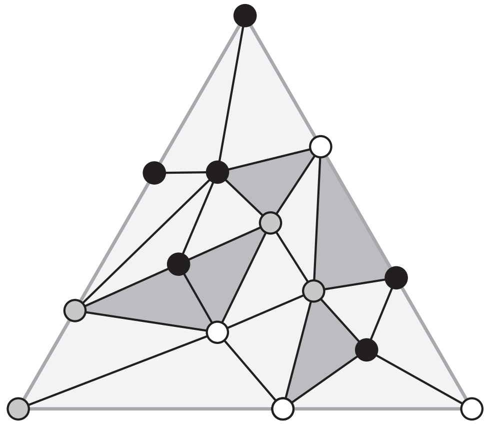

Figura 3. Triangles tipus (0,1,2).

Imitem l'argument de comptar que hem fet servir per a l'interval. Direm que un triangle és de tipus (a,b,c) si aquestes són les etiquetes dels seus vèrtexs (amb repetició si cal). Considerem les quantitats següents:

1. Q és el nombre de triangles de tipus (0,0,1) o (0,1,1).
2. R és el nombre de triangles de tipus (0,1,2).
3. X és el nombre d'arestes tipus (0,1) situades a la vora de T.
4. Y és el nombre d'arestes (0,1) interiors a T.

El nombre total d'arestes tipus (0,1) un cop desmuntat el triangle en els seus subtriangles és $2Q + R$ si mirem els triangles que les contenen, ja que els triangles de tipus (0,0,1) o (0,1,1) (figura 4) contribueixen amb 2 a la suma i els de tipus (0,1,2) amb 1. Els altres tipus de triangles no tenen arestes (0,1).

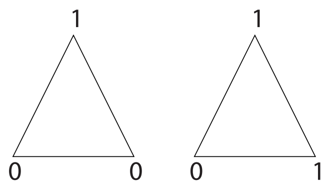

Figura 4. Triangles tipus (0,0,1) i (0,1,1).

D'altra banda, també és $2Y + X$ si mirem les arestes, ja que les arestes interiors pertanyen a dos triangles i les exteriors a només 1. Per tant, obtenim que per a qualsevol manera que assignem les etiquetes i per a qualsevol triangulació, obtenim la fórmula

$$2Q + R = 2Y + X.$$

Així, la paritat de R i X és la mateixa. Per tant, per a provar el que desitgem, cal veure que X és senar. Fins ara no hem fet servir les hipòtesis sobre l'etiquetatge i aquesta fórmula és vàlida per a qualsevol etiquetatge i triangulació.

Per les hipòtesis que tenim sobre els etiquetatges que considerem només hi ha arestes exteriors tipus (0,1) en un dels costats del triangle T, concretament en aquell costat en què els vèrtexs principals tenen etiquetes diferents 0 i 1. Si ens fixem, doncs, en aquesta aresta, i ens oblidem del triangle, tenim un segment subdividit i etiquetat amb elements de $\{0,1\}$ de manera que els extrems tenen valors diferents. Aquest és el cas en dimensió 1 que tot just acabem de demostrar i, per tant, X és senar.

Aquesta demostració ens prova l'existència d'aquest tipus de triangles, però ara veurem una altra demostració que, a més, és constructiva, és a dir, que ens proporciona un algorisme per trobar aquests triangles. Imagineu que els triangles són habitacions i que només hi ha portes a les parets tipus (0,1). La hipotèsi de la triangulació ens diu que només hi ha portes d'entrada en un dels costats del triangle, i a més n'hi ha un nombre senar (cas de dimensió 1). Dins de la planta hi ha tres tipus d'habitacions: sense portes en cap de les parets (no hi podrem accedir de cap manera), amb dues portes i amb una sola porta (fixeu-vos que no podem tenir un triangle amb tres costats de tipus (0,1)). El nostre objectiu és arribar a una habitació amb una sola porta, és a dir, del tipus (0,1,2).

Què hem de fer? Entrem per una porta exterior (recordeu que n'hi ha un nombre senar) i ens fiquem en la primera habitació. Només tenim dues opcions: ja hem trobat l'habitació que buscàvem de tipus (0,1,2), perquè només té una porta (per on hem entrat i ja no en podem sortir), o bé té dues portes. En el segon cas travessem la porta que no hem utilitzat i entrem en una nova habitació, i aquí podem repetir l'argumentació anterior. Com que hi ha un número finit d'habitacions, o bé acabarem el camí en una de tipus (0,1,2) o bé aquest camí ens portarà cap a l'exterior altre cop. Si sortim a l'exterior segur que podem tornar a entrar per una porta que no haguem utilitzat abans, ja que, com sabem, hi ha un nombre senar de portes exteriors i n'he fet servir un número parell. Així que tard o d'hora trobarem una habitació de tipus (0,1,2).

Fixeu-vos que hem descrit un algorisme per trobar almenys un triangle tipus (0,1,2). Podem afirmar que n'hi ha un nombre senar? De les que són accessibles des de l'exterior sí que podem dir que n'hi ha un nombre senar, ja que els camins descrits anteriorment o bé acaben en un triangle d'aquest tipus havent gastat una o dues portes anteriors, respectivament. Anem repetint l'operació i com que el número de portes exterior és senar també haurà d'haver-hi un número senar de camins que acabin en triangles de tipus (0,1,2).

Però hi pot haver habitacions de tipus (0,1,2) interiors a les quals no accedim amb aquest mètode. Bé, però fixeu-vos que han d'anar aparellades, perquè si comencéssim el recorregut en una d'elles, a la força hem d'acabar en una altra del mateix tipus interior, ja que no hi ha comunicació amb l'exterior del triangle.

En els dos casos hem demostrat el següent: donat un polígon amb una triangulació a la qual s'han assignat etiquetes $\{0,1,2\}$ als vèrtexs, el nombre de triangles tipus (0,1,2) té la mateixa paritat que el nombre d'arestes (a,b), $a \neq b$ (amb multiplicitat si són interiors). La condició sobre les etiquetes a la vora només ens assegura que aquests nombres són senars i el paper que a la demostració juguen les tipus (0,1) és totalment simètric si escollim (a,b), amb $a \neq b$.

Ara que ja tenim una mica d'intuïció, vegem el lema de Sperner en dimensions superiors. Fixeu-vos que podríem repetir el que hem fet en dimensió tres fent servir tetraedres i subdivisions en tetraedres més petits. Introduïm els conceptes necessaris per enunciar-lo en general.

Definició 1 *Donats $n+1$ punts independents de manera afí a $\mathbb{R}^m$ amb $m \geq n$, $\{p_0,\ldots,p_n\}$ (anomenats vèrtexs principals), un n-símplex Δ és l'embolcall convex d'aquest conjunt de punts. Cada subconjunt finit de $k+1$ elements de $\{p_0,\ldots,p_n\}$ determina un sub-símplex de dimensió k que s'anomena una k-cara de Δ.*

Fixeu-vos que un n-símplex té sempre $n+1$ cares del tipus $(n-1)$-símplex.

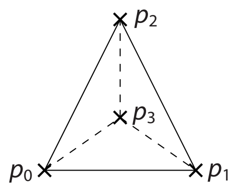

Figura 5. Un 3-símplex.

Tot $x \in \Delta$, l'embolcall convex de $\{p_0,\ldots,p_n\}$, s'expressa com una combinació lineal d'aquests punts $x = \sum \alpha_i p_i$ on $\sum \alpha_i = 1$ i $\alpha_i \geq 0$ per cada i. Els coeficients α_i són les coordenades baricèntriques corresponents al punt $x \in \Delta$, $x = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Definició 2 *Una triangulació d'un n-símplex Δ és una col·lecció finita de n-símplexs tals que la seva unió és Δ amb la propietat que, si dos d'aquests símplexs intersecten, aleshores ho fan en una cara sencera comuna a tots dos.*

Ens falta precisar què vol dir etiquetar una triangulació d'un símplex, és a dir, estendre les condicions d'etiquetage del cas $n = 2$.

Definició 3 *Donat un n-símplex S amb una triangulació, un etiquetatge de S amb etiquetes $\{0,1,\ldots,n\}$ és una aplicació L del conjunt de vèrtexs al conjunt d'etiquetes $\{0,1,\ldots,n\}$. Direm que L és un etiquetatge propi si es compleixen les dues condicions següents:*

1. *Els vèrtexs principals $p_i = (0,\ldots,1^{i+1)},\ldots,0)$, per $i = 0,\ldots,n$, tenen etiquetes diferents, $L(p_i) \neq L(p_j)$ per tot $i \neq j \in \{0,1,\ldots,n\}$.*

2. *Les etiquetes utilitzades en una cara exterior de dimensió $n - 1$ determinada per un subconjunt $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$ de vèrtexs principals corresponen només al conjunt $\{L(p_{i_1}), \ldots, L(p_{i_n})\}$ de les etiquetes usades en aquests vèrtexs.*

Direm que un n-subsímplex de la triangulació és distingit si els seus $n + 1$ vèrtexs utilitzen totes les etiquetes, és a dir, és de tipus $(0,1,\ldots,n)$.

Lema de Sperner *(1928) [5] Donada una triangulació amb un etiquetatge propi d'un n-símplex, hi ha un nombre senar de n-símplexs distingits a la triangulació.*

Prova Ja hem demostrat els casos $n = 1$ i $n = 2$. Suposarem que el resultat és cert per símplexs de dimensions menors que n. Sigui K un n-símplex amb una triangulació i un etiquetatge propi. Considerem, com hem fet per als casos anteriors, les quantitats següents:

1. Q és el número de n-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1,i)$, on $i = 0,1,\ldots,n-1$.
2. R és el número de n-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n)$, és a dir, distingits.
3. X és el número de $(n-1)$-símplexs a la vora de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$.
4. Y és el número de $(n-1)$-símplexs interiors de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$.

En comptar els símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$ (amb multiplicitat) veiem que se satisfà la igualtat $2Q + R = X + 2Y$, essencialment repetint l'argumentació del cas del triangle. Així cal veure que X és senar. Noteu que els $(n-1)$-símplexs a la vora de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$ només es troben en una de les cares de dimensió $n - 1$, aquella determinada per aquells vèrtexs principals p_i amb etiqueta al subconjunt $\{0,1,\ldots,n-1\}$. El lema de Sperner per dimensió $n - 1$ ens diu que X és senar.

Igualment es pot demostrar de manera constructiva imitant l'argument donat per al cas $n = 2$. Ara pensem que només podem travessar els $(n-1)$-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$. Aleshores, dins la triangulació hi haurà, com abans, n-símplexs amb una sola entrada que són els distingits, dues entrades, o cap. El mateix raonament que hem fet servir per al cas de dimensió 2 ens porta a la mateixa conclusió, i obtenim així un algorisme per accedir a aquests símplexs distingits.

2.2. El problema del pastís

Tornem a la festa a l'hora del pastís!

Suposem que tenim un pastís rectangular que cal tallar i repartir entre un grup de n convidats a una festa fent $n - 1$ talls amb el ganivet paral·lels al costat més petit del pastís. Però cada convidat pot tenir una opinió diferent sobre quin dels talls prefereix, per exemple, en funció de la gana que tingui o dels ingredients del pastís, que pot no ser homogeni i fins i tot preferir un tall en una zona especial del pastís. Algun convidat pot tenir poca gana, però preferir el tall que té més xocolata, o bé, el que té la cirereta... L'objectiu és tallar el pastís de manera que tots els convidats estiguin contents amb el tall que els ha tocat i no prefereixin el de cap altre convidat (repartició sense enveja). Podem trobar una solució al problema?

Suposarem que el pastís rectangular té longitud 1. Una possible repartició ve donada per una n-tupla de números reals positius $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ tals que $\sum x_i = 1$ on cada x_i és la longitud del tall que es troba a la i-èssima posició.

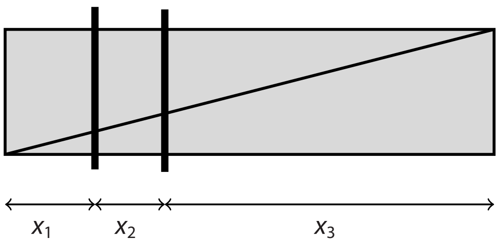

Figura 6. Exemple de repartició del pastís.

Per tant, l'espai de totes les possibles presentacions del pastís tallat forma un $(n-1)$-símplex a $\mathbb{R}^n$ amb vèrtexs $p_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, n-1$, que corresponen a un únic tall de longitud 1 del pastís. Cada repartició correspon a les coordenades baricèntriques d'un punt del $(n-1)$-símplex i l'objectiu, doncs, és triar un punt que satisfaci a tothom.

Suposem que el pastís es presenta ja repartit als convidats. Direm que una persona prefereix un dels talls fixat si creu que cap altre tall del pastís és millor que l'escollit. Aquesta elecció és independent del que pensin els altres convidats, i assumim que sempre escull algun tall. A més, en aquest procés suposarem les dues condicions següents:

1. Els convidats tenen gana: sempre triaran un tall abans que quedar-se sense res, és a dir, d'alguna manera tots els tall són acceptables per als convidats, ja que tots tenen gana.
2. Condició de continuïtat: si una persona prefereix un tall en una successió convergent de possibles reparticions, aleshores prefereix el mateix tall en la repartició límit (és coherent en les seves eleccions per continuïtat).

Expliquem ara la condició de continuïtat amb un exemple en el cas de dos convidats. Si col·loquem el ganivet per tallar a la posició $\frac{1}{3} - \frac{1}{2^n}$ pels diferents valors de $n \in \mathbb{N}$ i un convidat sempre prefereix el primer tall, aleshores si partim el pastís a la posició $\frac{1}{3}$, que és el límit dels punts anteriors, el convidat continua preferint el primer tall.

La idea de l'estratègia que presentarem és original de F.W. Simmons [6] (vegeu també [4]). Treballarem amb dos etiquetatges del $(n-1)$-símplex i les seves subdivisions: un representarà els convidats i l'altre les eleccions que van fent. Primer introduïm una manera estàndard de construir triangulacions a través dels baricentres dels triangles en un procés que es pot anar iterant.

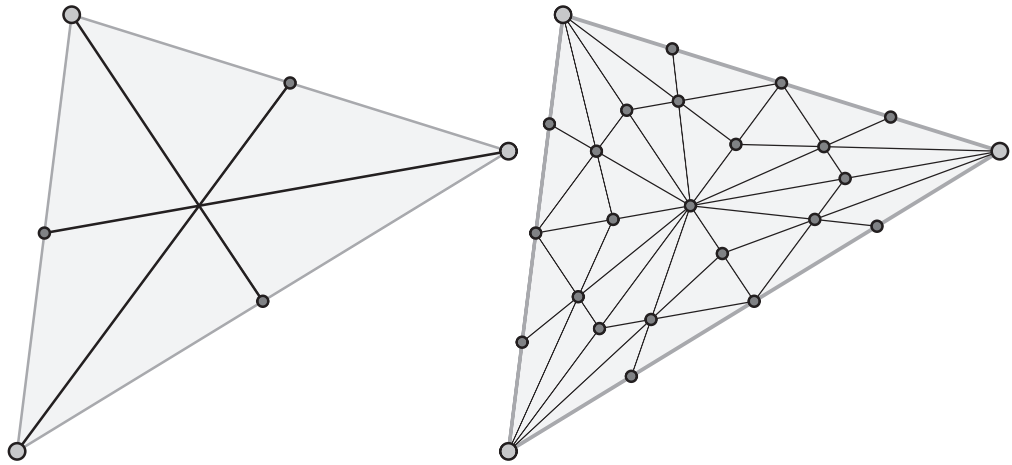

Figura 7. Subdivisió baricèntrica.

Definició 4 *Donat un n-símplex S amb vèrtexs* $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$*, el baricentre* $b \in S$ *és el punt de coordenades* $b = \frac{1}{n+1} \sum p_i$.

Comencem amb els 1-símplexs o arestes. Afegim el baricentre de cadascun i considerem les noves arestes que apareixen. Ara mirem els 2-símplexs o triangles formats, i repetim en cada un la construcció anterior, és a dir, afegir el baricentre com un nou vèrtex i totes les arestes que van als vèrtexs que ja teníem del procés anterior; això no només crea noves arestes, sinó també una triangulació del 2-subsímplexs. I ara continuem si tenim tetraedres o 3-símplexs. Afegim el seu baricentre com un vèrtex més, i totes les arestes del baricentre cap a tots els vèrtexs que hem afegit en el pas anterior i així generem a la vegada nous triangles i nous tetaredres. I anem iterant aquest procés si la dimensió és més gran, afegint el baricentre i creant tots els subsímplexs necessaris que el contenen (figura 7).

Observeu que, en la nova triangulació, els símplexs són «més petits»: el màxim dels diàmetres de tots els símplexs ha disminuït. Aquest procés de subdivisió baricèntrica es pot iterar tantes vegades com sigui necessari de manera que els diàmetres dels símplexs siguin tan petits com calgui: donat $\epsilon > 0$, existeix $n \geq 0$ tal que el màxim dels diamètres dels símplexs de la triangulació obtinguda iterant n vegades (o més) el procés de subdivisió baricèntrica és menor que ϵ. Anomenarem S^k la triangulació del n-símplex inicial obtinguda iterant k-vegades la subdivisió baricèntrica.

El conjunt $\{C_1, \ldots, C_n\}$ denota la llista de convidats a la festa. Per cada $i \geq 0$, i una iteració de subdivisió baricèntrica S^k del $(n-1)$-símplex determinat per vèrtexs $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$, li assignarem un etiquetatge L_C amb valors a $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de manera que tots els triangles siguin distingits. És possible?

Vegem com aconseguir-ho (figura 9). Per $i = 0$, només cal assignar convidats diferents als n vèrtexs principals p_i, per exemple $L_C(p_i) = C_{i+1}$ (figura 8).

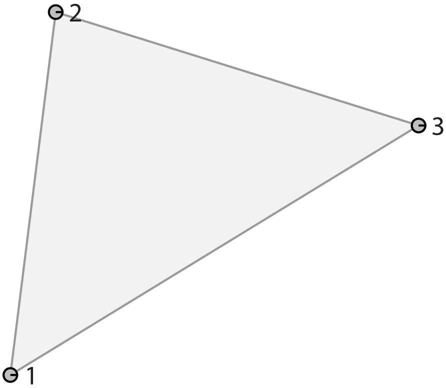

Figura 8. Un triangle distingit, tipus (1,2,3).

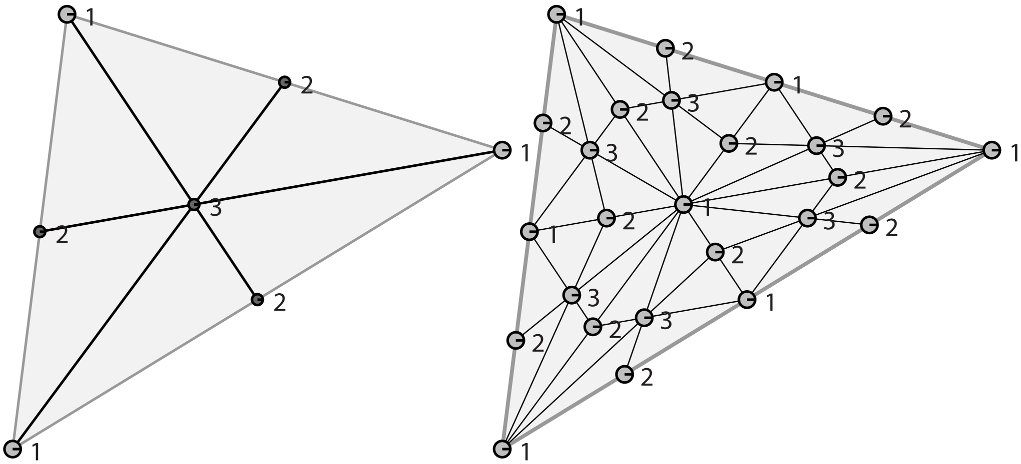

Figura 9. Triangulacions etiquetades on tots els triangles són tipus (1, 2, 3).

En el pas següent fem el procediment que iterarem. Tots els vèrtexs que provenen del pas anterior s'assignen al mateix convidat C_1, els vèrtexs que són baricentres de subsímplexs 1-dimensionals s'assignen a C_2, els vèrtexs que són baricentres de subsímplexs 2-dimensionals s'assignen a C_3 i així successivament fins a assignar C_n als baricentres de subsímplexs $(n-1)$-dimensionals de la triangulació. Ara, cada cop que iterem la subvisió baricèntrica per obtenir una triangulació recol·loquem les etiquetes segons el procediment anterior. Informalment direm: donat un vèrtex v de C^j, $L_C(v)$ és el propietari d'aquest vèrtex. Aquest etiquetatge clarament no és propi.

Amb aquest procediment, a cada pas tots els elements de la triangulació són distingits, però l'etiquetatge no és propi, ja que falla sempre la primera propietat a partir de la primera iteració.

Ara construirem un nou etiquetatge L_P de la manera següent. Un vèrtex $v = (x_1, \ldots, x_n)$ de S^j descriu una repartició del pastís en talls, i aleshores preguntarem al convidat $L_C(v)$ assignat al vèrtex v quin dels talls prefereix, i posarem etiqueta $L_P(v) = i$ si ha escollit el tall i-èssim. Es llegeix dient que, si oferim el repartiment en talls descrit per les coordenades de v, el convidat designat per $L_C(v)$ prefereix el tall $L_P(v)$.

Ara sí que el nou etiquetage L_C és propi. Els vèrtexs principals són de la forma $p_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ i, per tant, com que els convidats tenen gana, sempre tindrem $L_C(p_i) = i + 1$, ja que escolliran l'únic tall no buit i, per tant, es compleix la primera condició. Ara bé, els $(n-2)$-subsímplexs es carateritzen perquè hi ha una coordenada fixada que sempre val zero (aquella que correspon al vèrtex oposat, que no apareix a la llista de vèrtexs $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{(n-1)}}\}$ que la generen). I per tant, cap convidat escollirà aquell tall; així, si v és un vèrtex en aquell subsímplex es complirà que $L_C(v) \in \{i_1, \ldots, i_{(n-1)}\}$, i se satisfà la segona condició.

Així doncs, el lema de Sperner afirma que la triangulació S^j amb etiquetatge L_P té un nombre senar de $(n-1)$-símplexs distingits. Què vol dir això? Doncs que hi ha un $(n-1)$-símplex de la triangulació de manera que els seus vèrtexs determinen talls de pastís amb la propietat que convidats diferents tenen preferències diverses, però evidentment cada vèrtex correspon a una forma distinta de tallar el pastís. Ara bé, podem agafar la iteració j de manera que el diàmetre d'aquest símplex sigui tan petit com vulguem. La condició de continuïtat ens diu que si apliquem un procés de pas al límit a través de fer subdivisions baricèntriques per obtenir símplexs distingits de diàmetre cada cop més petit obtindrem successions de vèrtexs que convergeixen a un punt del símplex amb la propietat que representa una partició del pastís en la qual convidats diferents tenen preferències diverses. La solució buscada serà repartir el pastís amb trossos de longitud les coordenades d'aquest punt límit. És a dir, obtenim el teorema següent.

Teorema 5 *Amb les suposicions anteriors, existeix una manera de repartir el pastís de manera que cada persona prefereix un tall diferent.*

Recordeu que el lema de Sperner té una demostració constructiva que descriu un algorisme per trobar símplexs distingits; per tant, és possible trobar aquest punt amb el problema del pas al límit. Però a la pràctica podem trobar una solució si fixem un nivell de tolerància. Així, el primer és acordar un nivell de tolerància $\epsilon > 0$ entre els convidats, és a dir, que si un convidat prefereix un tall de pastís x_i en un punt del símplex $x = (x_1, \ldots, x_n)$, aleshores també prefereix el tall i-èssim en punts a distància menor que ϵ. Per tant, considerem directament una triangulació C^j on tots els $(n-1)$-símplexs tinguin diàmetre menor que ϵ, trobem amb un algorisme un $(n-1)$-símplex distingit i prenem el baricentre d'aquest $(n-1)$-símplex. Aquesta serà la divisió justa i sense enveja del pastís.

2.3. El problema del lloguer

Ara anem al problema del lloguer. Un grup d'estudiants vol llogar un pis per compartir. Han trobat un pis que els agrada a tots. D'entrada, el lloguer es divideix en parts iguals entre ells, però ara cal repartir-se les habitacions i no totes són iguals. Unes són més grans, altres tenen més llum, altres donen al carrer i són més sorolloses... És just que tots paguin per igual independentment de l'habitació que els toqui?

El nostre objectiu ara és trobar una repartició justa d'habitacions i lloguer de manera que tots ells estiguin satisfets amb l'habitació que tenen i el preu que en paguen.

Com en l'exemple anterior, en aquest procés suposarem les dues condicions següents:

1. En qualsevol repartició del lloguer en habitacions, tothom troba una opció acceptable.
2. En qualsevol repartició del lloguer segons habitacions, un estudiant sempre preferirà una habitació de franc a una que no ho sigui.
3. Si un estudiant prefereix una habitació/preu en una successió convergent de possibles reparticions, aleshores prefereix la mateixa opció en la repartició límit.

Definició 6 *En les condicions anteriors, existeix una repartició del lloguer en habitacions de manera que estudiants diferents prefereixen habitacions diferents.*

Suposem que el lloguer del pis val 1. Enumerem les habitacions d'1 a n. Aleshores una tupla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ amb $\sum x_i = 1$ representa una repartició del lloguer en habitacions de manera que x_i és el que cal pagar per ocupar l'habitació i. Així, el $(n-1)$-símplex estàndard representa l'espai de totes les possibles opcions d'assignar preus a les habitacions.

Considerem triangulacions obtingudes amb la subdivisió baricèntrica amb etiquetat L_P de manera que tots els triangles són distingits. Les etiquetes són els estudiants, que anomenarem $\{C_1, \ldots, C_n\}$, $L_P(v) = C_i$ voldrà dir que en el vèrtex v és l'estudiant C_i qui tria habitació, i amb aquesta elecció repetint el procediment de l'apartat anterior, si aquest estudiant tria, segons la repartició de preus que correspon al vèrtex, l'habitació j, obtenim un nou etiquetat $L_E(v) = j$. Es llegeix dient que en la repartició del lloguer que defineix el vèrtex v, l'estudiant $L_P(v)$ escull l'habitació $L_E(v)$.

Vegem quines condicions es compleixen amb les hipòtesis del problema. En els vèrtexs principals $p_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ hi ha un munt d'habitacions de franc per escollir, així només podem afirmar per la segona condició que $L_E(p_i) \neq i$. A més, en els $(n-2)$-subsímplex que es carateritzen perquè hi ha una coordenada fixada k que sempre val zero, les condicions en les que es fa l'elecció imposa que $L_E(v) = k$. Per tant, l'etiquetatge L_E no és propi, sembla que justament és el dual. Com ho arreglem?

Considerem un nou $(n-1)$-símplex T a $\mathbb{R}^n$ que obtenim afegint un nou vèrtex T_i, $i = 1, \ldots, n$, al símplex estàndard amb el qual hem començat, per cada cara de dimensió $n-2$ on s'anul·la una coordenada ($x_i = 0$). I a més afegim totes les cares necessàries des d'aquest vèrtex cap a la cara corresponent (figura 10).

Per a totes les triangulacions anteriors S^j, fem el mateix afegint els nous vèrtexs i obtenim triangulacions T^j. En totes elles posem $L_E(T_i) = i$. Es pot interpretar com que afegim la possiblitat que un llogater rebi diners dels seus companys per quedar-se l'habitació i.

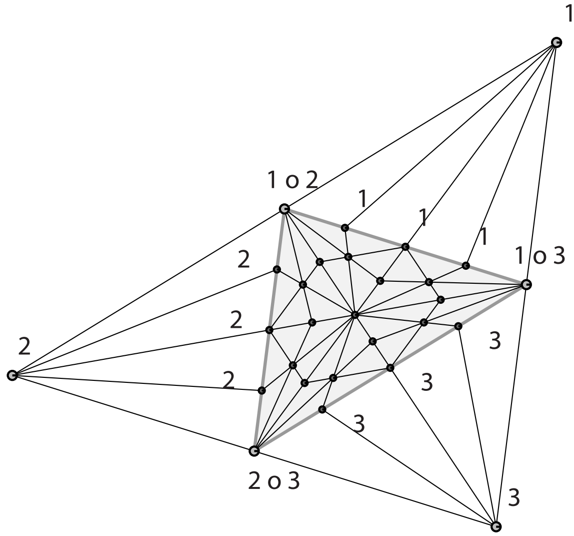

Figura 10. Etiquetatge dual.

Amb els nous vèrtexs i etiquetes, L_E és un etiquetatge propi de T^j i el lema de Sperner ens diu que hi ha un ($n-1$)-símplex distingit. A més, aquest s'ha de trobar dins de S^j al triangle original per la manera com hem estès L_E als vèrtexs que no hi pertanyen. És a dir, tenim un ($n-1$)-símplex de manera que en les opcions que ofereixen els seus vèrtexs, diferents estudiants escullen habitacions distintes. Ara acabem l'argument de la mateixa manera que en l'exemple anterior: o bé fent un pas al límit o bé introduint el concepte de tolerància en l'elecció.

Fixeu-vos que amb l'estratègia per convertir L_E en un etiquetatge propi, en realitat hem demostrat un lema de Sperner dual per un altre tipus de coloracions del graf.

3. El lema de Sperner i el teorema del punt fix de Brouwer

La rellevància que va tenir el lema de Sperner el 1929 [2] va ser el fet que permetia donar una demostració d'un teorema conegut, el teorema del punt fix de Brouwer, via combinatòria topològica i en proporciona una demostració constructiva oposada a la demostració existencial originària de Brouwer.

Teorema del punt fix de Brouwer *(1912) [1] Sigui B^n una bola de dimensió n. Tota aplicació contínua $f: B^n \to B^n$ té almenys un punt $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.*

Primer, aquest resultat és vàlid a espais deformables de manera contínua en una bola, i aquest és el cas dels símplexs. Per exemple, un triangle es pot deformar de manera contínua en un disc i al revés. Des d'un punt de vista més distès, el teorema del punt fix de Brouwer es pot explicar amb un got ple d'un líquid. De manera informal, cada partícula del líquid ocupa una posició a l'interior del got. Tot seguit remeneu el contingut de la manera que vulgueu (en un sentit, en l'altre, fent vuits...) i, quan el líquid torni a quedar quiet, afirmem que almenys una partícula està ocupant la mateixa posició que ocupava abans de remenar.

Veurem com el lema de Sperner s'usa per a demostrar aquest resultat en aparença tan diferent. Ho farem per aplicacions contínues del símplex en ell mateix. Sigui S un n-símplex amb vèrtexs $p_i = (0, \ldots, 1^{i+1)}, \ldots, 0)$, $i = 0, \ldots, n$ en coordenades baricèntriques. Suposem que $f\colon S \to S$ és una aplicació contínua sense punts fixos, és a dir, $f(x) \neq x$ per tot $x \in S$.

Fixem una triangulació S^j obtinguda iterant j vegades la subdivisió baricèntrica i etiquetem els seus vèrtexs de la manera següent. Donat un vèrtex $v = (x_0, \ldots, x_n)$ en coordenades baricèntriques, aleshores $L(v) = i$, $i = 1, \ldots, n$, si i és el subíndex més petit tal que la coordenada i-éssima de $f(v)$, que anomenarem $f(v)_i$, és més petita que la coordenada i-éssima original de v. Com que $\sum f(v)_i = \sum x_i = 1$, aquest procediment està ben definit, ja que per hipòtesis no hi ha punts fixos. Comprovem que aquest etiquetatge és propi.

Es compleix la primera condició en els vèrtexs principals, ja que $L(p_i) = i$ doncs $f(0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ ha de tenir coordenada i-éssima menor que 1 i les anteriors no poden disminuir. Els punts $x \in S$ que es troben a la cara de dimensió $n-1$ determinada per $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$ tenen la característica que una de les coordenades (la del vèrtex que no apareix a la llista) sempre és zero, aleshores $L(x)$ mai prendrà el valor corresponent al símplex d'aquesta component, ja que no pot disminuir de valor en aplicar la funció f, és a dir, $L(x) \in \{i_1, \ldots, i_n\}$. Per tant, el lema de Sperner ens diu que hi ha almenys un n-símplex distingit a S^j amb vèrtexs $\{z^{j,0}, \ldots, z^{j,n}\}$ on $L(z^{j,i}) = i$.

Prenem aquest símplexs per cada iteració de la subdivisió baricèntrica construint una successió de símplexs. Ara farem servir que en el n-símplex tota successió de punts té una successió parcial convergent. Prenem la successió formada pels vèrtexs $\{z^{j,0}\}$, sabem que hi ha successió parcial convergent a un punt z^0. La continuïtat de f ens assegura que $f(z^0)_0 \leq z^0_0$. Descartem els triangles que no formen part d'aquesta successió parcial convergent i repetim el mateix argument amb la successió de vèrtexs $\{z^{j,1}\}$. I obtenim z^1 amb $f(z^1)_1 \leq z^1_1$. Com que els punts són vèrtexs de triangles amb diàmetre que tendeix a zero, tenim també que els límits coincideixen $z^1 = z^0$. Repetint aquest procés fins a $\{z^{j,n}\}$, obtenim un punt z^* que compleix $f(z^*)_i \leq z^*_i$ per tot $i = 0, \ldots, n$. Però això només és possible si $f(z^*)_i = z^*_i$ per tot i, arribant així a una contradicció, ja que hem suposat que f no tenia punts fixos.

El lema de Sperner apareix en molts contextos diferents. Una bona lectura és [3] en què, per exemple, podreu veure quina relació té amb el joc de tauler HEX.

4. El lema de Sperner i el joc del HEX

El joc del HEX és un joc de tauler que va inventar Piet Hein el 1942, però que van popularitzar J. Nash i M. Gardner. Es juga en un tauler de regions hexagonals (figura 11). Un jugador té peces blanques i l'altre, negres, i col·loquen les peces al tauler per torns. Quan una casella està ocupada aleshores no es pot tornar a modificar. Dues bandes oposades del tauler corresponen al jugador de blanc i les altres dues al de negre i l'objectiu és fer un camí de peces que uneixi els costats oposats. Guanya el primer que ho aconsegueix.

Veurem que en una partida del HEX sempre hi ha un guanyador. És a dir, no és possible omplir el tauler de fitxes blanques i negres sense que hi hagi un camí de fitxes del mateix color que permeti guanyar a un dels jugadors. Per explicar-ho plantejarem el joc d'una manera equivalent: posem vèrtexs al centre de cada casella i una aresta per caselles veïnes. És a dir, ens quedem amb el graf dual (figura 12). I ara jugarem a pintar vèrtexs amb l'objectiu de fer camins de vèrtexs del mateix color a través de les arestes.

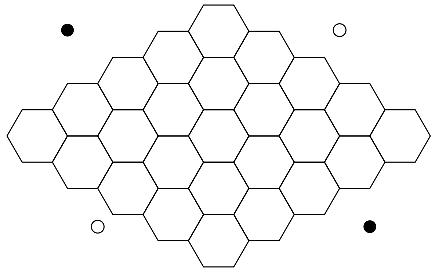

Figura 11. Tauler del HEX.

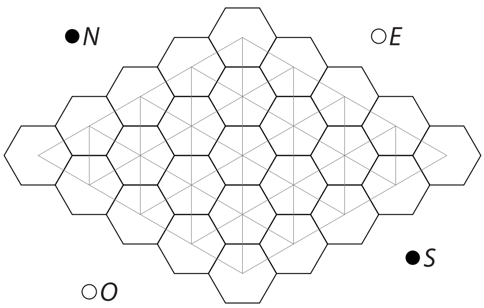

Figura 12. Graf dual del tauler del HEX.

En el nostre graf afegirem els vèrtexs amb els punts cardinals per marcar les diferents regions de sortida/arribada i també les arestes que els uneixen amb els vèrtexs corresponents del seu costat (figura 13). A més, unirem els vèrtexs dels punts cardinals en sentit circular amb el veí.

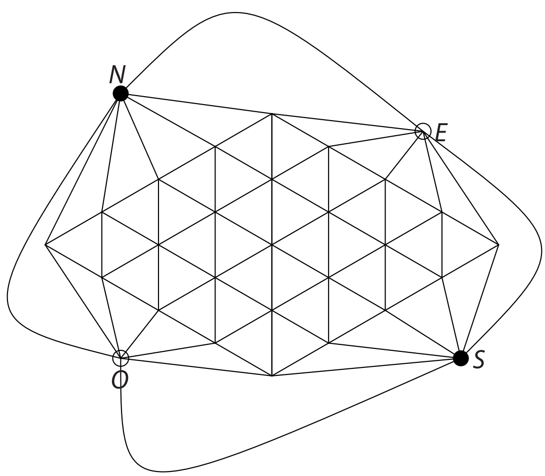

Figura 13. Graf dual amb els nodes cardinals.

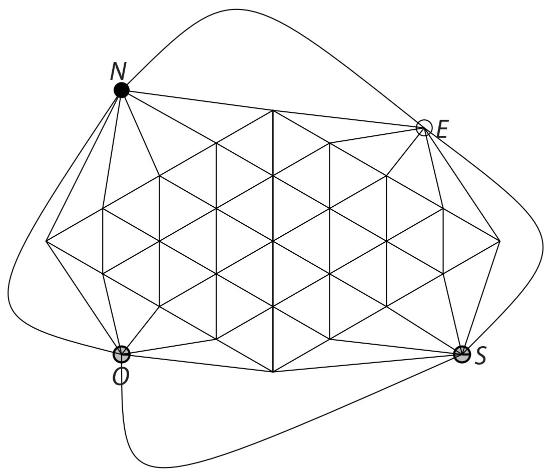

Figura 14. Graf dual amb els nodes cardinals i vèrtexs grisos.

Suposem que hem acabat una partida i que tots els vèrtexs estan pintats de color blanc o negre, i sense cap guanyador. No hi ha cap camí ni blanc ni negre unint costats oposats. Ara afegim-hi un altre color: gris. Els vèrtexs blancs que no s'uneixen a cap camí que surti de *E* els repintem a gris. Els vèrtexs negres que no s'uneixen a cap camí que surti de *N* també els posem en gris. Així, com que no hi ha guanyadors, tenim que *S* i *O* són grisos (figura 14).

Si ara ens fixem bé en la configuració, obtenim una regió poligonal triangulada amb els vèrtexs pintats de tres colors diferents. Si pensem en el triangle format pels tres vèrtexs *N*, *E* i *S* com a principals i que tenen etiquetes diferents, aleshores el vèrtex *O* és l'únic que es troba en una aresta exterior, l'aresta *N*-*S*, i el seu color compleix la condició de Sperner.

El lema de Sperner ens diu que hi ha un triangle tricolor i que en els seus vèrtexs hi són representats tots tres colors. Aquest triangle té un vèrtex de color gris, un de blanc i un de negre. Si el vèrtex gris era originàriament blanc, aleshores es pot unir al vèrtex blanc del triangle i, per tant, forma part d'un camí blanc que surt de *E*. Això no pot ser per com hem escollit els vèrtexs que canviàvem a color gris. Aleshores havia de ser negre abans de fer-lo gris, però el mateix argument ens diu que no pot ser. Arribem, doncs, a contradicció.

Aquest és un joc amb estratègies guanyadores; a l'article [3] en podeu trobar més detalls.

Referències

[1] Brouwer, L.E.J. (1912). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71, 97-115.

[2] Knaster, B., Kuratowski, C., Mazurkiewicz, S. (1929). Ein Beweis des Fixpuntktsatzes für *n*-dimensionale Simplexe. *Fund. Math*, 14(1), 132-137.

[3] Matoušek, J., Ziegler, G., Björner, A. (2014). *Around Brouwer's fixed point theorem*, *arXiv:1409.7890*.

[4] Simmons, F., Su, F. (2003). Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker. *Math. Social Sci.*, 45, 15-25.

[5] Sperner, E. (1928). Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6, 265-272.

[6] Su, F. (1999). Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division. *Amer. Math. Monthly*, 106, 930-942.